`Il n'y aura pas de colle de mathématiques la semaine de la rentrée ie du 28/02 au 04/03.`

Semaine du 07/03 au 11/03 **Colle de Mathématiques $\mathcal{MP}$**

1 Espaces vectoriels euclidiens

- Espace euclidien, adjoint d'un endomorphisme. Matrice de l'adjoint en bon.
- Endomorphismes symétriques, cas des projecteurs et symétries. Etude des sev stables.
- Réduction des endomorphismes symétriques. Cas des endomorphismes symétriques positifs. $||f||^2$ = la plus grande valeur propre de $f^* \circ f$.
- Groupe orthogonal de E (Révisions de 1ère année) : Isométries vectorielles, réflexions et rotations, matrices orthogonales, classification des isométries vectorielles en dim 2 et 3. Détermination de la matrice d'une rotation.
- Applications de la réduction des endomorphismes symétriques aux formes quadratiques : endomorphisme autoadjoint associé à une FQ, réduction d'une forme quadratique en b.o.n. Réduction simultanée de 2 FBS dont l'une est définie positive.
- Réduction des coniques et des quadriques : inventaire des quadriques avec leur expression réduite.

2 Fonctions intégrables sur un intervalle

2.1 Intégrabilité

- Définitions et diverses caractérisations des fonctions intégrables positives sur I avec la théorie des segments...
- Principales propriétés : additivité, relation de Chasles, intégrales de Riemann, thm de comparaison des fonctions positives, reste d'intégrale associé à une fonction intégrable sur I, lien avec les intégrales partielles.
- En exercices à connaître : règle du $x^\alpha f(x)$ et intégrales de Bertrand.
- Généralisation aux fonctions réelles ou complexes. Lien avec les intégrales partielles.
- Notion d'intégrale convergente et lien avec les fonctions intégrables. Exemple de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^\alpha}$ avec $\alpha > 0$.

2.2 Convergence

- Convergence en moyenne et convergence en moyenne quadratique.

Cas d'un intervalle borné ou pas.

- Théorème de convergence dominée et de permutation série/intégrale.

Intégrale dépendant d'un paramètre

- Théorème de continuité sous le signe intégral avec HD ou HDL. Cas particulier où I est un segment.
- Dérivation sous le signe intégral. Généralisation aux fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur I.

2.3 Exemples de fonctions définies par des intégrales

- La fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t$
- Les intégrales eulériennes $\displaystyle\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} \, \mathrm{d}t$.
- Transformée de Fourier $\widehat{f} : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(t) \, \mathrm{d}t$.
- Transformée de Laplace $L[f] : s \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t$.