

## Révisions de MPSI:

Étude de suites récurrentes

### Séries d'un evn:

- Définition d'une série ; propriété de troncature,  $\sum(E)$  est un  $\mathbb{K}$ -ev isomorphe à  $E^{\mathbb{N}}$ . Convergence, divergence. Propriétés élémentaires. Reste de série CV.
- Séries télescopiques, géométriques, de Riemann.
- Critère de Cauchy dans un Banach. Application à la convergence absolue.
- Série géométriques d'une  $\mathbb{K}$ -algèbre unitaire normée, séries exponentielles : application aux matrices.
- Permutation des termes pour une série ACV.
- Test de convergence, règle de D'Alembert.
- Cas des suites réelles positives : la convergence de  $\sum u_n$  équivaut à la majoration des sommes partielles. Thm de comparaison. Règle du  $n^\alpha u_n$ . Série de Bertrand. Comparaison logarithmique. Comparaison des sommes partielles ou des restes selon la CV ou la DV de  $\sum u_n$ . Comparaison série/intégrale.
- Cas des suites réelles à signe quelconque : Théorème des séries alternées. Méthode du développement limité. Méthode du regroupement de termes.

## Suites doubles sommables:

- Séries doubles de réels positifs et problème d'interversion des  $\sum$ .
- Séries doubles réelles ou complexe. Si  $u$  sommable alors  $\sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n u_{p,q} \xrightarrow{m,n \rightarrow +\infty} \sum_{p,q \geq 0} u_{p,q}$  et
 
$$\sum_{p,q \geq 0} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}$$
- Cas d'une famille produit, produit de Cauchy. Application à  $e^{z+z'} = e^z + e^{z'}$ .

## Convergence d'une suite de fonctions:

- Convergence simple, uniforme sur tout compact, uniforme. Lien entre les deux modes de convergence.
- Méthode séquentielle pour obtenir une CVU.
- Propriétés conservées par limites simples.
- Cauchy uniforme. Application au théorème d'interversion des limites. Continuité conservée par CVU.
- Exemples d'études :
  - limite uniforme d'une suite de polynômes.
  - méthode de la majoration uniforme :  $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^z$  uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}$ .
- Intégrabilité sur  $[a, b]$  d'une suite de fonctions qui CVU sur  $[a, b]$ .
- Théorème de dérivabilité d'une limite.