Colle de Mathématiques: $\diamond$ $\mathcal{MP}$ $\diamond$ **2004/2005**

Semaine du 15/11/04 au 19/11/04

- Révision du programme précédent sur la réduction.
- **Lemme des noyaux.**

Application aux sev caractéristiques : $E = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus ... \oplus \Gamma_r$ avec $\Pi_f = \prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ et $\Gamma_i = \mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i id_E)^{\alpha_i}$.

Exercice : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Trouver une CNS pour que $(A^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ soit bornée.

- **Diagonalisation :**diverses CNS ; restriction à un sev stable.

Caractérisation des sev stables par f diagonalisable.
Diagonalisation simultannée.

- **Trigonalisation :** diverses CNS.

Trigonalisation simultanée en exercice.
Recherche de droites ou d'hyperplan f-stable.
Pratique de la trigonalisation.

- **Application de la réduction :**

Suites récurrentes linéaires d'ordre p à coefficients constants.
Puissance de matrices.

Colle de Mathématiques: $\diamond$ $\mathcal{MP}$ $\diamond$ **2004/2005**

Semaine du 22/11/04 au 26/11/04

- **Complétude** Suites de Cauchy, espace complet, partie complète. Propriétés. Critère de Cauchy de convergence pour $f : A \subset E \to F$ en $a \in \overline{A}$. Prologement à $\overline{A}$ d'une application $f : A \subset E \to F$ uniformément continue sur A.
- **Compacité** Définition séquentielle. Cas des espaces discrets : compact **ssi** fini .

Tout compact est fermé, borné, complet. Un fermé dans un compact est compact. Réunion finie de compact. Intersection décroissante de compacts. Produit cartésien de compacts. Image continue d'un compact. Si K compact et $f : K \to F$ continue injective, alors f homéomorphisme de K sur $f(K)$. Exemple : Tout arc simple fermé est homéomorphe à un cercle.
Propriétés liées à $\mathbb{R}$: Etude des compacts de $\mathbb{R}^n$. $\overline{\mathbb{R}}$ est compact.

- **Cas de la dim finie** Si E evndf, toutes les normes sont équivalentes sur E. Les compacts de E sont exactement les parties fermées bornées de E. Exemple : $\mathcal{O}(n)$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- **Applications aux suites** Toute suite (u_n) bornée de l'evndf E admet une valeur d'adhérence. De plus, (u_n) converge **ssi** (u_n) admet une seule valeur d'adhérence.
- **Caractérisation des applications continues** Si $A \subset E$ evndf et $f : A \to F$, alors (f continue sur tout compact de $A \Longrightarrow f$ continue sur A). Cas des applications linéaires et multilinéaires avec source de df.
- **Connexité par arcs**

Définition, parties convexes. Toute sphère, le complémentaire d'une boule ouverte sont connexes par arcs.
$A \subset \mathbb{R}$ est connexe par arcs **ssi** A est un intervalle. $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
Image continue d'une partie connexe par arcs. Si $A \subset E$ est connexe par arcs, les seules parties de A ouvertes et fermées dans A sont $\emptyset$ et A.
Si $A \subset E$ connexe par arcs et $f : A \to F$ continue avec F discret. Alors f est constante.