

1 Applications linéaires continues

- Diverses caractérisations d'une application linéaire continue.
- Norme d'une application linéaire continue : 4 expressions. Exemples.
- Généralisation à une application bilinéaire.

2 Réduction des endomorphismes

■ Sous-espaces stables :

caractérisation matricielle : application à une \oplus de sev f -stables.

Notion de drapeau, Base adaptée à un drapeau. Cas d'un drapeau formé de sev f -stables.

■ Etude des endomorphismes nilpotents :

Si f nilpotent d'ordre p alors $id_E - f \in GL(E)$ et détermination de $(id_E - f)^{-1}$.

Matrice nilpotente canonique associée à f nilpotent d'ordre n .

■ Polynômes d'endomorphismes :

Définition et principales propriétés. Polynôme minimal Π_f .

Si $d^\circ \Pi_f = d$ alors $(id_E, f, f^2, \dots, f^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[f]$.

Polynôme minimal d'un bloc diagonal, d'une restriction à un sev f -stable.

■ Eléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Etude du spectre de $P(f)$, de f^{-1} .

Somme directe des sev propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes.

■ Polynôme caractéristique.

CNS pour que $P(f) \in GL(E)$ avec Π_f ou χ_f .

Π_f et χ_f ont les mêmes facteurs irréductibles.

Théorème de Cayley-Hamilton (démonstration non exigible)

■ Lemme des noyaux.

Application aux sev caractéristiques : $E = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \dots \oplus \Gamma_r$ avec $\Pi_f = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et

$\Gamma_i = \text{Ker}(f - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$.

Exercice : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Trouver une CNS pour que $(A^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ soit bornée.

■ Diagonalisation : diverses CNS ; restriction à un sev stable.

Caractérisation des sev stables par f diagonalisable.

Diagonalisation simultanée.

■ Trigonalisation : diverses CNS.

Trigonalisation simultanée en exercice.

Recherche de droites ou d'hyperplan f -stable.

Pratique de la trigonalisation.

■ Application de la réduction :

Suites récurrentes linéaires d'ordre p à coefficients constants.

Puissance de matrices.